Воркшоп по математическому моделированию и дифференциальным уравнениям, посвященный юбилею Заслуженного деятеля науки РФ, д.ф.-м.н., проф. Ватульяна А.О.

Нестеров С.А.

Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН

Об обратных задачах термомеханики

Владикавказ

22-24 ноября 2023

Актуальность

Широкое внедрение в области техники с высокотемпературным окружением элементов конструкций, изготовленных из функционально-градиентных материалов, которые моделируются неоднородными структурами, ставит перед исследованиями задачи идентификации термомеханических характеристик в виде функций. Такие задачи относятся к классу коэффициентных обратных задач термомеханики.

Исследованию коэффициентных обратных задач механики и теплопроводности посвящены работы

Алексеева А.С., Алифанова О.М., Артюхина Е.А., Румянцева С.В., Аниконова А.Ю., Апбасова С.О., Бакушинского А.Б., Благовещенского А.С., Бухгейма А.Л., Ватульяна А.О., Гасанова А., Глушковых Е.В. и Н.В., Денисова А.М., Кабанихина С.И., Лаврентьева М.М., Ломазова В.А., Ляпина А.А., Морозова В.А., Ненарокомова А.В., Романова В.Г., Сковороды А.Р., Сатыбаева А. Дж., Тананы В.П., Яхно В.Г., Bui H.D., Chang J-D., Chavent G., Cheng T.C., Chen G., Constantinescu A., Jadamba B., Hao D., Klibanov M.V., Kravaris C., Lee C.R., Lukasievicz S.A., Xu M.H., Cao K., Lesnic D., Chen J., Gockenbach M.S. и др.

Основные методы решения КОЗ

1) Метод сведения обратных задач к экстремальным задачам и применение градиентных методов минимизации функционала невязки или генетических алгоритмов;

2) Метод обращения разностных схем;

3) Метод операторов Вольтерра.

Обратные задачи термоупругости

1. Вестяк В. А., Земсков А. В., Эрихман Н. Н. Численно-аналитическое решение обратной коэффициентной задачи термоупругости для пластины // Вестник МАИ. 2009. Т. 16, №6. С. 244-249.

2. Ломазов В. А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: Изд-во ОрелГТУ, 2002. 168 с.

3. Lukasievicz S. A., Babaei R., Qian R. E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // J. Thermal Stresses. 2003. V. 26, №1. P. 13-23.

Цель данного исследования

Разработка простых и универсальных подходов для идентификации распределенных неоднородностей в стержневых, плоских и цилиндрических структурах.

Нелинейная коэффициентная обратная задача термомеханики решается путем построения итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линейное операторное уравнение 1-го рода, полученное на основе слабой постановки и метода линеаризации.

Некоторые работы, в которых представлены основные результаты исследования

1. **Ватульян А.О., Нестеров С.А.** Коэффициентные обратные задачи термомеханики. 2-е изд., исправ. и доп. Ростов-на-Дону – Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2022. 178 с.
2. **Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.** On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51, No. 3-4. P. 767-773.
3. **Ватульян А.О., Нестеров С.А.** К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 4. С. 951-959.
4. **Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R.** Some features of solving an inverse problem on identification of material properties of functionally graded pyroelectrics // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 128. P. 1157-1167.

Термомеханические характеристики

k_{ij} компоненты тензора теплопроводности

c_{ε} удельная теплоемкость

γ_{ij} компоненты тензора температурных напряжений

c_{ijkl} компоненты тензора упругих модулей

ρ плотность

Физические поля

θ температура

u_i компоненты вектора перемещений

σ_{ij} компоненты тензора напряжений

Нагрузки

p_i компоненты вектора механической нагрузки

q плотность теплового потока

Постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости

$$\left(c_{ijkl}u_{k,l} - \gamma_{ij}\theta\right)_{,j} = \rho\ddot{u}_i, \qquad (1)$$

$$(k_{ij}\theta_{,j})_{,i} - c_\varepsilon\dot{\theta} - T_0\gamma_{ij}\dot{u}_{i,j} = 0, \qquad (2)$$

$$\theta(M,0) = u_i(M,0) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(M,0) = 0. \qquad (3)$$

Тепловое нагружение

$$u_i\,|_{S_u} = 0, \quad \theta\,|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij}\theta_{,i}n_j\,|_{S_q} = q, \quad \sigma_{ij}n_j\,|_{S_\sigma} = 0 \qquad (4)$$

Механическое нагружение

$$u_i\,|_{S_u} = 0, \quad \theta\,|_{S_T} = 0, \quad \theta_{,i}n_j\,|_{S_q} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j\,|_{S_\sigma} = p_i \qquad (5)$$

дополнительная информация

$$\theta\,|_{S_q} = f(x,t) \qquad t \in [T_1, T_2] \qquad (6)$$

$$u_i\,|_{S_\sigma} = g_i(x,t) \qquad i = 1,2,3 \qquad t \in [T_3, T_4] \qquad (7)$$

Постановка КОЗ термоупругости состоит в нахождении термомеханических характеристик (коэффициентов дифференциальных операторов термоупругости) из (1)-(4) или (5) по дополнительной информации (6) или (7).

Операторные уравнения, связывающие искомые термомеханические характеристики с трансформантами перемещений и температуры на части границы тела

На основе использования слабой постановки и и метода линеаризации

При тепловом нагружении

$$\int_V \delta k_{ij}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(n-1)} dV + p \int_V \delta c_{\varepsilon}^{(n-1)} (\tilde{\theta}^{(n-1)})^2 dV + $$
$$+ pT_0 \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS \qquad \textbf{(8)}$$

При механическом нагружении

$$\int_V \delta c_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} dV + p^2 \int_V \delta \rho^{(n-1)} (\tilde{u}_i^{(n-1)})^2 dV + $$
$$+ \int_V \delta \gamma^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS \qquad \textbf{(9)}$$

В случае восстановления одной характеристики при известных остальных полагаем в уравнениях (9), (10) все поправки кроме той, которую определяем, равными нулю.

Итерационная схема решения обратной задачи

1) Поиск начального приближения коэффициентов в классе линейных функций на основе минимизации функционала невязки.

2) Нахождение поправки $\delta\bar{a}^{(n-1)}(z)$ реконструируемых коэффициентов путем решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на *(n-1)* итерации.

3) Построение нового приближения $\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{a}^{(n-1)}(z).$

Выход из итерационного процесса осуществлялся:

1) по предельному количеству итераций, равному 20;

2) по достижению функционалом невязки порогового значения, равного 10^{-6}.

В случае **теплового** нагружения функционал невязки

$$J_1 = \int_a^b (f(\tau_1) - W^{(n-1)}(1,\tau_1))^2 d\tau_1. \qquad \textbf{(10)}$$

В случае **механического** нагружения функционал невязки

$$J_2 = \int_c^d (g(\tau_2) - U^{(n-1)}(1,\tau_2))^2 d\tau_2. \qquad \textbf{(11)}$$

1. Задача для термоупругого стержня

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (12)$$

$$\sigma_x = E(x)\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x)\theta, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = c_\varepsilon(x)\frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0\gamma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \qquad (14)$$

$$\theta(x,0) = u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad (15)$$

Граничные условия при тепловом воздействии

$$u(0,t) = \theta(0,t) = 0, \quad -k(l)\frac{\partial \theta}{\partial x}(l) = q_0\varphi(t), \quad \sigma_x(l,t) = 0. \qquad (16)$$

Граничные условия при механическом воздействии

$$u(0,t) = \theta(0,t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(l,t) = 0, \quad \sigma_x(l,t) = p_0\phi(t). \qquad (17)$$

2. Задача для термоупругой трубы

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \textbf{(18)}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k(r) r \frac{\partial \theta}{\partial r}\right) = c_\varepsilon(r)\frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(r)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad \textbf{(19)}$$

$$\theta(r,0) = u(r,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = 0 \qquad \textbf{(20)}$$

Граничные условия при тепловом воздействии

$$\theta(r_1,t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_1,t) = 0, \quad -k(r_2)\frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2,t) = q_0 \varphi(t), \quad \sigma_{rr}(r_2,t) = 0 \qquad \textbf{(21)}$$

Граничные условия при механическом воздействии

$$\theta(r_1,t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_1,t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2,t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2,t) = p_0 \phi(t) \qquad \textbf{(22)}$$

Компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - \gamma\theta, \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} - \gamma\theta$$

3. Задача для конечного термоупругого цилиндра

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \qquad \textbf{(23)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \qquad \textbf{(24)}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(k(r) r \frac{\partial \theta}{\partial r}) + k(r)\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = c(r)\frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(r)(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial t}), \qquad \textbf{(25)}$$

$$u_z(r, \pm h, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}(r, \pm h, t) = 0, \qquad \textbf{(26)}$$

$$\sigma_{rr}(r_1, z, t) = \sigma_{rz}(r_1, z, t) = \theta(r_1, z, t) = 0, \qquad \textbf{(27)}$$

$$\theta(r, z, 0) = u_r(r, z, 0) = \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, z, 0) = u_z(r, z, 0) = \frac{\partial u_z}{\partial t}(r, z, 0) = 0 \qquad \textbf{(28)}$$

Способы нагружения:

$$-k(r_2)\frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = q_0 g_1(z)\varphi(t), \quad \sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0 \qquad \textbf{тепловой} \qquad \textbf{(29)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, z, t) = -p_{rr} g_2(z)\phi(t), \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0 \qquad \textbf{нормальная нагрузка} \qquad \textbf{(30)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = -p_{rz} g_3(z)\psi(t) \qquad \textbf{касательная нагрузка} \qquad \textbf{(31)}$$

4. Задача для термоупругого прямоугольника

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2u_3}{\partial t^2}, \tag{32}$$

$$k(x_3)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(k(x_3)\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right)=c_\varepsilon(x_3)\frac{\partial\theta}{\partial t}+T_0\gamma(x_3)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial t}+\frac{\partial^2u}{\partial x_3\partial t}\right), \tag{33}$$

$$u_1(\pm L,x_3,t)=\sigma_{31}(\pm L,x_3,t)=\frac{\partial\theta}{\partial x_1}(\pm L,x_3,t)=0, \tag{34}$$

$$u_1(x_1,0,t)=u_3(x_1,0,t)=\theta(x_1,0,t)=0, \tag{35}$$

$$u_1(x_1,x_3,0)=u_3(x_1,x_3,0)=\theta(x_1,x_3,0)=\frac{\partial u_1}{\partial t}(x_1,x_3,0)=\frac{\partial u_3}{\partial t}(x_1,x_3,0)=0 \tag{36}$$

Граничные условия при тепловом воздействии

$$-k(h)\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\left(x_1,h,t\right)=q_0R_2\left(x_1\right)\varphi(t),\qquad \sigma_{13}\left(x_1,h,t\right)=\sigma_{33}\left(x_1,h,t\right)=0, \tag{37}$$

Граничные условия при нормальной механической нагрузке

$$\sigma_{33}\left(x_1,h,t\right)=-p_{33}R_1\left(x_1\right)\phi\left(t\right),\qquad \sigma_{13}\left(x_1,h,t\right)=0,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_3}\left(x_1,h,t\right)=0 \tag{38}$$

$$\sigma_{11}=\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\gamma\theta,\qquad \sigma_{33}=\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\gamma\theta,\qquad \sigma_{13}=\sigma_{31}=\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

5. Задача для неоднородного по толщине слоя

$$(\lambda+2\mu)u_{1,11}+(\lambda u_{3,3})_{,1}+((\mu(u_{1,3}+u_{3,1}))_{,3}-(\gamma\theta)_{,1}=\rho\ddot{u}_1, \quad \textbf{(39)}$$

$$((\lambda+2\mu)u_{3,3})_{,3}+(\lambda u_{1,1})_{,3}+((\mu(u_{1,3}+u_{3,1}))_{,1}-(\gamma\theta)_{,3}=\rho\ddot{u}_3, \quad \textbf{(40)}$$

$$k\theta_{,11}+(k\theta_{,3})_{,3}=c\dot{\theta}+T_0\gamma(\dot{u}_{1,1}+\dot{u}_{3,3}), \quad \textbf{(41)}$$

$$u_1(x_1,0,t)=u_3(x_1,0,t)=\theta(x_1,0,t)=0, \quad \textbf{(42)}$$

$$\sigma_{13}(x_1,h,t)=F_1(x_1,t), \quad \sigma_{33}(x_1,h,t)=F_2(x_1,t), \quad \textbf{(43)}$$

$$q(x_1,h,t)=F_3(x_1,t), \quad \textbf{(44)}$$

$$u_1(x_1,x_3,0)=u_3(x_1,x_3,0)=\theta(x_1,x_3,0)=\dot{u}_1(x_1,x_3,0)=\dot{u}_3(x_1,x_3,0)=0 \quad \textbf{(45)}$$

Обратная задача сводится к определению неоднородных по толщине слоя характеристик по дополнительной информации о полях температуры и смещений, измеренных на верхней границе слоя:

$$\theta(x_1,h,t)\Big| = f(x_1,t), \quad t\in[T_1,T_2] \quad \textbf{(46)}$$

$$u_i(x_1,h,t)\Big| = g_i(x_1,t), \quad t\in[T_3,T_4] \quad \textbf{(47)}$$

Упрощение задачи для слоя

С помощью процедуры осреднения двумерная задача для слоя распадается на две более простые одномерные задачи усредненных по продольной координате компонент полей.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\mu}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z}\right)=\bar{\rho}\frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \tau_2^2}$$

$$\bar{U}_1(0,\tau_2)=0$$

$$\bar{\mu}\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z}(1,\tau_2)=\bar{F}_2(\tau_2) \qquad \textbf{(48)}$$

$$\bar{U}_1(z,0)=0$$

$$\bar{U}_1(1,\tau_2)=g_1(\tau_2) \qquad \tau_2\in[a_1,b_1]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{s}(z)\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\gamma}(z)\bar{W})=\varepsilon_0^2\bar{\rho}(z)\frac{\partial^2 \bar{U}_3}{\partial \tau_1^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{k}(z)\frac{\partial \bar{W}}{\partial z}\right)=\bar{c}(z)\frac{\partial \bar{W}}{\partial \tau_1}+\delta_0\bar{\gamma}(z)\frac{\partial^2 \bar{U}_3}{\partial z\partial \tau_1}$$

$$\bar{U}_3(0,\tau_1)=\bar{W}(0,\tau_1)=0$$

$$\bar{s}(z)\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial z}(0,\tau_1)-\bar{\gamma}\bar{W}(0,\tau_1)=0 \qquad \textbf{(49)}$$

$$-\bar{k}(z)\frac{\partial \bar{W}}{\partial z}(0,\tau_1)=\bar{F}_3(\tau_1)$$

$$\bar{W}(z,0)=\bar{U}_3(z,0)=\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \tau_1}(z,0)=0$$

$$\bar{W}(1,\tau_1)=f(\tau_1) \qquad \tau_1\in[a_3,b_3]$$

Схема решения связанных задач термомеханики

1. Обезразмеривание задач с введением параметра связанности $\delta_0 = \dfrac{\gamma_0^2 T_0}{c_0 s_0}$.
2. Применение к обезразмеренным задачам преобразование Лапласа по времени.
3. Получение канонической системы ОДУ 1-го порядка в трансформантах Лапласа с переменными коэффициентами.
4. В случае задачи для термоупругого стержня – сведение к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го порядка и решение ее методом коллокаций.
5. В случае задачи для термоупругой трубы – применение метода пристрелки.
6. В случае задач для прямоугольника и конечного цилиндра – совместное применение метода разделения переменных и метода пристрелки для гармоник.
7. Решение в оригиналах - путем обращения трансформант одним из 2-х методов: 1) на основе теории вычетов (для термоупругого стержня); 2) методом разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра (для других тел).

Операторные уравнения

для стержня

$$\int_0^1 \delta\overline{k}^{(n-1)}\left(\frac{dW^{(n-1)}}{dz}\right)^2 dz + p\int_0^1 \delta\overline{c}^{(n-1)}\left(\tilde{W}^{(n-1)}\right)^2 dz +$$
$$+\delta_0 p\int_0^1 \delta\overline{\gamma}^{(n-1)}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}\tilde{W}^{(n-1)}dz = \beta_1\tilde{\varphi}(p)(\tilde{f}(p)-\tilde{W}^{(n-1)}(1,p)), \quad \textbf{(50)}$$

$$\int_0^1 \delta\overline{E}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}\right)^2 dz + p^2\int_0^1 \delta\overline{\rho}^{(n-1)}\left(\tilde{U}^{(n-1)}\right)^2 dz -$$
$$-\int_0^1 \delta\overline{\gamma}^{(n-1)}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}\tilde{W}^{(n-1)}dz = -\beta_2\tilde{\phi}(p)(\tilde{g}(p)-\tilde{U}^{(n-1)}(1,p)) \quad \textbf{(51)}$$

для трубы

$$\int_{\xi_0}^1 \delta\overline{k}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi + p\int_{\xi_0}^1 \delta\overline{c}^{(n-1)}(\tilde{W}^{(n-1)})^2 \xi d\xi +$$
$$+\delta_0 p\int_{\xi_0}^1 \delta\overline{\gamma}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi}+\frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi}\right)\tilde{W}^{(n-1)}\xi d\xi = \beta_1\tilde{\varphi}(p)(\tilde{f}(p)-\tilde{W}^{(n-1)}(1,p)), \quad \textbf{(52)}$$

$$\int_{\xi_0}^1 \delta\overline{\lambda}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi}+\frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi}\right)^2 \xi d\xi + \int_{\xi_0}^1 \delta\overline{\mu}^{(n-1)}\left(\left(\frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi}\right)^2\right)\xi d\xi +$$
$$+p^2\int_{\xi_0}^1 \delta\overline{\rho}^{(n-1)}\left(\tilde{U}_r^{(n-1)}\right)^2 \xi d\xi - \delta_0\int_{\xi_0}^1 \delta\overline{\gamma}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{U}_r^{(n-1)}}{d\xi}+\frac{\tilde{U}_r^{(n-1)}}{\xi}\right)\tilde{W}^{(n-1)}\xi d\xi = -\beta_2\tilde{\phi}(p)(\tilde{g}(p)-\tilde{U}_r^{(n-1)}(1,p)) \quad \textbf{(53)}$$

для конечного цилиндра

$$\tilde{f}(\xi_2, p) = \sum_{N_3=0}^{\infty} \tilde{f}_{N_3}(p)\cos(\nu_{N_3}\xi_2) \qquad \tilde{g}(\xi_2, p) = \sum_{N=0}^{\infty} \tilde{g}_{N_3}(p)\cos(\nu_{N_3}\xi_2) \tag{54}$$

Операторные уравнения сформулированы для гармоник

При $N = 0$

$$\int_{\xi_0}^{1}\left(\delta\overline{k}^{(n-1)}\left(\tilde{d}_0'^{(n-1)}\right)^2 + p\delta\overline{c}^{(n-1)}\left(\tilde{d}_0^{(n-1)}\right)^2 + p\delta_0\delta\overline{\gamma}^{(n-1)}\left(\tilde{a}_0'^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1}\right)\tilde{d}_0^{(n-1)}\right)\xi_1 d\xi_1 = g_{10}\beta_1\tilde{\varphi}(p)\left(\tilde{f}_0(p) - \tilde{d}_0^{(n-1)}(1,p)\right), \tag{55}$$

$$\int_{\xi_0}^{1}\left(\delta\overline{\lambda}^{(n-1)}\left(\tilde{a}_0'^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1}\right)^2 + \delta\overline{\mu}^{(n-1)}\left(\left(\tilde{a}_0'^{(n-1)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1}\right)^2\right) + p^2\delta\overline{\rho}^{(n-1)}\left(\tilde{a}_0^{(n-1)}\right)^2\right. -$$

$$\left. -\delta_0\delta\overline{\gamma}^{(n-1)}\left(\tilde{a}_0'^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(n-1)}}{\xi_1}\right)\tilde{d}_0^{(n-1)}\right)\xi_1 d\xi_1 = -g_{20}\beta_2\tilde{\phi}(p)\left(\tilde{g}_0(p) - \tilde{a}_0^{(n-1)}(1,p)\right) \tag{56}$$

При $N = 1, 2, \ldots$

$$\int_{\xi_0}^{1}\left(\delta\overline{k}^{(n-1)}\left(\left(\tilde{d}_N'^{(n-1)}\right)^2 + \nu_N^2\left(\tilde{d}_N^{(n-1)}\right)^2\right) + p\delta\overline{c}^{(n-1)}\left(\tilde{d}_N^{(n-1)}\right)^2 + \right.$$

$$\left. +2p\delta_0\delta\overline{\gamma}^{(n-1)}\left(\tilde{a}_N'^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_n^{(n-1)}}{\xi_1} + \nu_N\tilde{b}_N^{(n-1)}\right)\tilde{d}_N^{(n-1)}\right)\xi_1 d\xi_1 = g_{1N_3}\beta_1\tilde{\varphi}(p)\left(\tilde{f}_{N_3}(p) - \tilde{d}_{N_3}^{(n-1)}(1,p)\right), \tag{57}$$

$$\int_{\xi_0}^{1}\left(\delta\overline{\lambda}^{(n-1)}\left(\tilde{a}_N'^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_N^{(n-1)}}{\xi_1} + \nu_N\tilde{b}_N^{(n-1)}\right)^2 + 2y_0\delta\overline{\mu}^{(n-1)}\left(\left(\tilde{a}_N'^{(n-1)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{a}_N^{(n-1)}}{\xi_1}\right)^2 + \left(\nu_N\tilde{b}_N^{(n-1)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\tilde{b}_N'^{(n-1)} - \nu_N\tilde{a}_N^{(n-1)}\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + p^2\delta\overline{\rho}^{(n-1)}\left(\left(\tilde{a}_N^{(n-1)}\right)^2 + \left(b_N^{(n-1)}\right)^2\right) - 2\delta_0\delta\overline{\gamma}^{(n-1)}\left(\tilde{a}_N'^{(n-1)} + \frac{\tilde{a}_N^{(n-1)}}{\xi_1} + \nu_N\tilde{b}_N^{(n-1)}\right)\tilde{d}_N^{(n-1)}\right)\xi_1 d\xi_1 = -g_{2N_3}\beta_2\tilde{\phi}(p)\left(\tilde{g}_{N_3}(p) - \tilde{a}_{N_3}^{(n-1)}(1,p)\right) \tag{58}$$

Влияние модуля Юнга на смещение торца стержня

$$\phi(\tau_2) = H(\tau_2)$$

$\bar{E}(z) = 1$ - сплошная линия

$\bar{E}(z) = 1.2 - 0.5z^3$ - точки

$\bar{E}(z) = 1 + (z-1)^2$ - пунктир

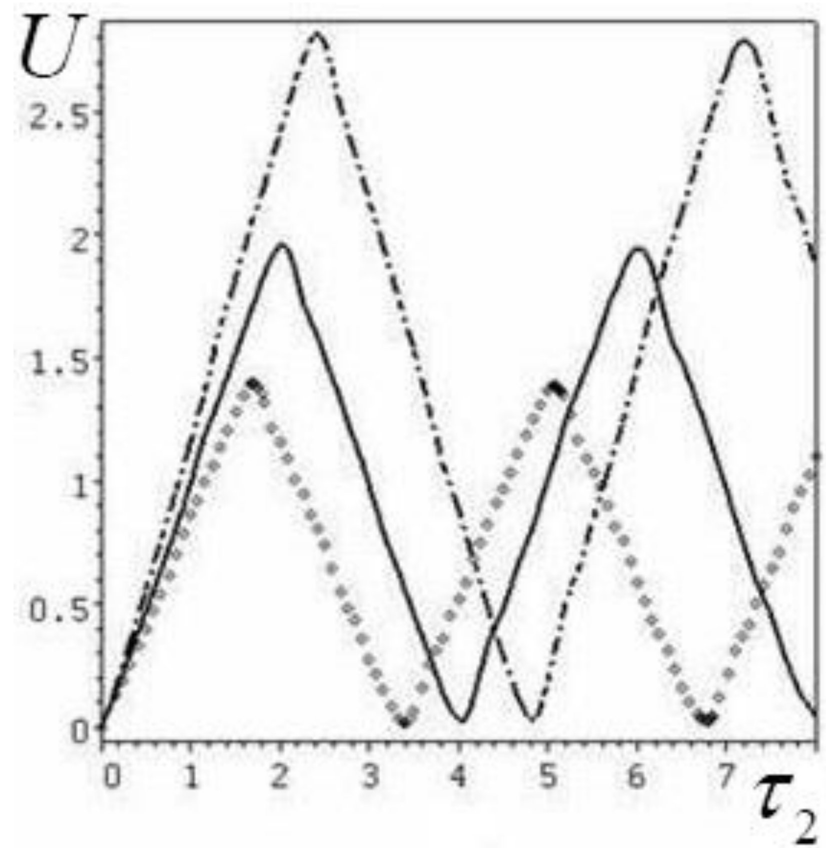

Рис. 1

Различные законы неоднородности существенно влияют на граничные физические поля.

Исследование влияния различных законов неоднородности на физические поля

Влияние коэффициента теплопроводности на температуру внешней поверхности трубы

$$\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$$

$\bar{k}(\xi) = 1$ - сплошная линия

$\bar{k}(\xi) = 2.7 - ln\left(0.5 + 25\left(\xi - \xi_0\right)\right)$ - точки

$\bar{k}(\xi) = 1.5 + \cos\left(10\left(\xi - \xi_0\right)\right)$ - пунктир

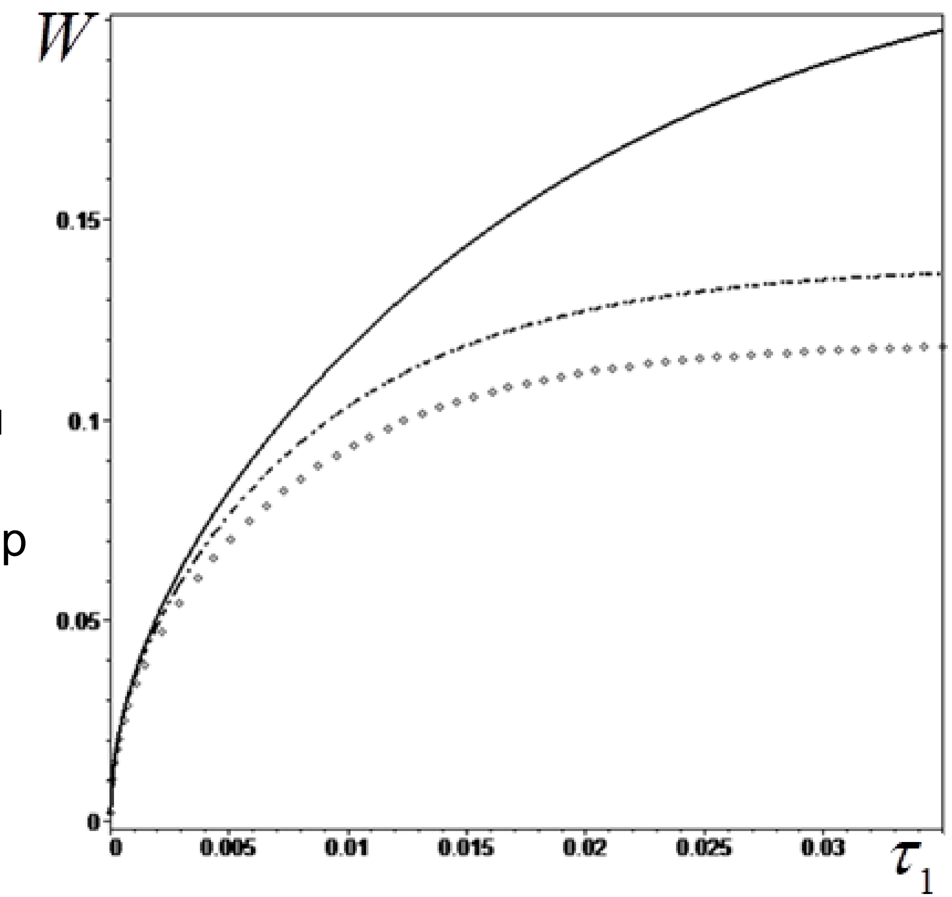

Рис. 2

Реконструкция одной характеристики при известных остальных

Операторные уравнения в оригиналах для стержня

Операторные уравнения на конечном временном отрезке (в оригиналах) получаются путем обращения операторных уравнений в трансформантах на основе теорем операционного исчисления.

Для нахождения поправок коэффициента теплопроводности

$$\int_0^1 \delta\overline{k}^{(n-1)} R_1(z,\tau_1)dz = f(\tau_1) - W^{(n-1)}(1,\tau_1), \qquad \textbf{(59)}$$

Для нахождения поправок удельной теплоемкости

$$\int_0^1 \delta\overline{c}^{(n-1)} R_2(z,\tau_1)dz = f(\tau_1) - W^{(n-1)}(1,\tau_1), \qquad \textbf{(60)}$$

$$R_1(z,\tau_1) = \frac{1}{\beta_1}\int_0^{\tau_1} \frac{\partial^2 W^{(n-1)}(z,\tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial W^{(n-1)}(z,\tau_1-\tau)}{\partial z} d\tau,$$

$$R_2(z,\tau_1) = \frac{1}{\beta_1}\int_0^{\tau_1} \frac{\partial W^{(n-1)}(z,\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial W^{(n-1)}(z,\tau_1-\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

Влияние выбора временного диапазона съема дополнительной информации на результаты реконструкции функции

$\varphi(\tau_1) = H(\tau_1)$

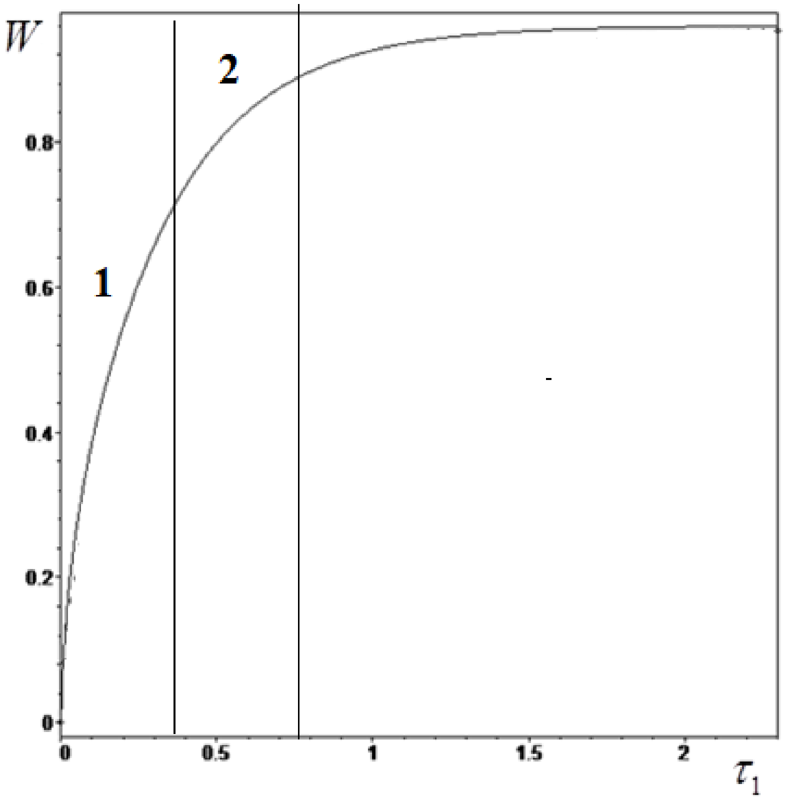

Рис. 3

1 – точки
2- штрихпунктир

$\overline{c}(z) = 0.6 + 2z^2$

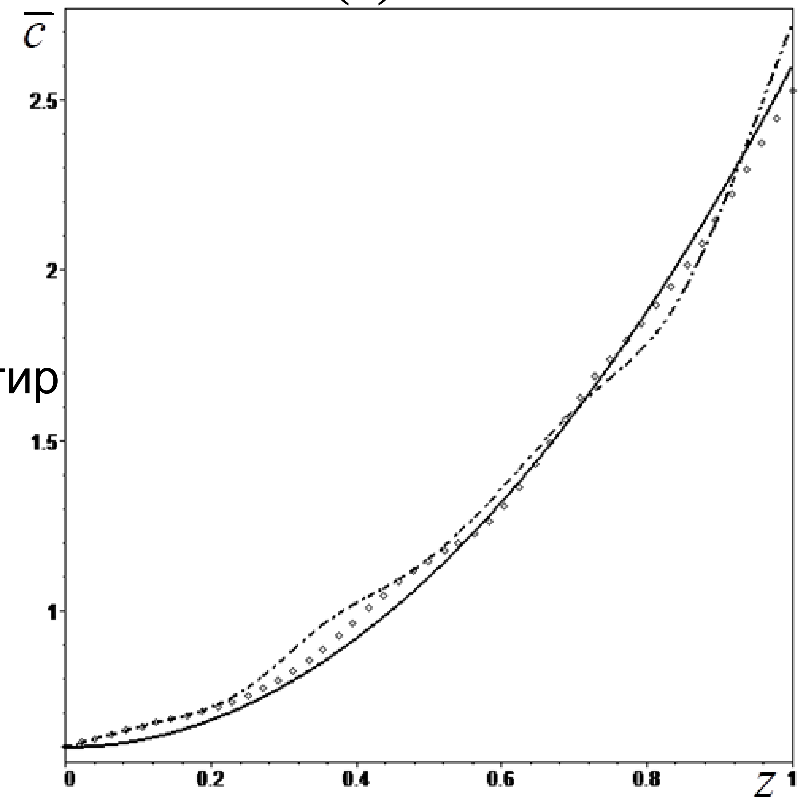

Рис. 4

В первом случае погрешность реконструкции на 8 итерации не превышает 2%, а во втором – 6%. Таким образом, наиболее информативным является первый интервал, при котором скорость изменения дополнительной информации максимальна и он находится в наиболее близкой к началу отчета времени зоне.

Сходимость итерационного процесса реконструкции функции

$$\bar{k}(z) = 1.5 - \cos(\pi z - 1)$$

Таблица.

Номер итерации	Невязка	Относительная погрешность, %
1	0.00296596	19.8
2	0.00024487	15.4
3	0.00001750	10.7
4	00.00000288	7.2
5	0.00000094	6.0
6	0.00000080	5.9

Итерационный процесс реконструкции быстро сходится, т.к. функционал невязки на пятой итерации достигает порогового значения, а дальнейшее увеличение числа итераций практически не увеличивает точность реконструкции.

Результаты идентификации коэффициентов Ламе трубы при механическом нагружении

$$\bar{\lambda}(\xi) = 0.5e^{10(\xi - \xi_0)} - 0.2$$

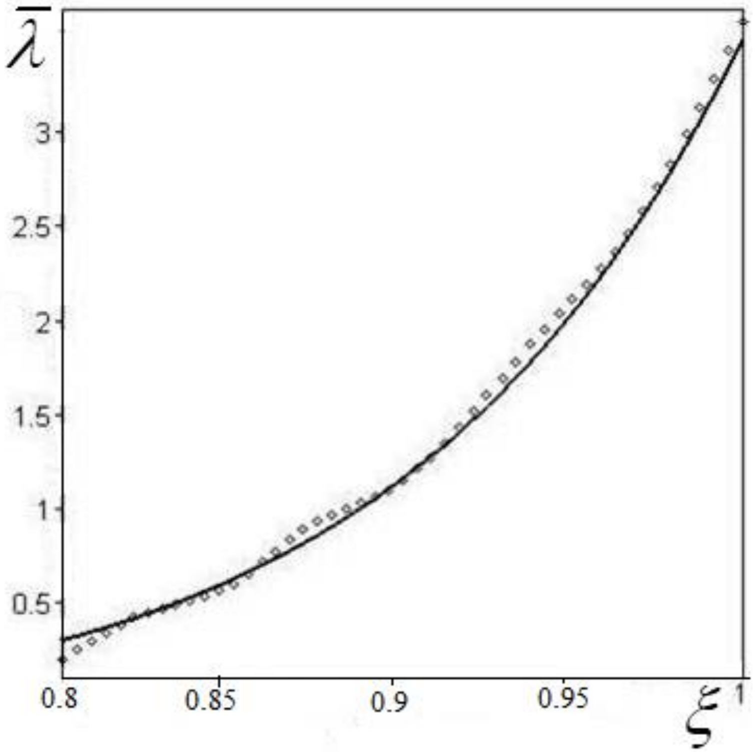

Рис. 5

$$\bar{\mu}(\xi) = 50(\xi - \xi_0)^2 + 2$$

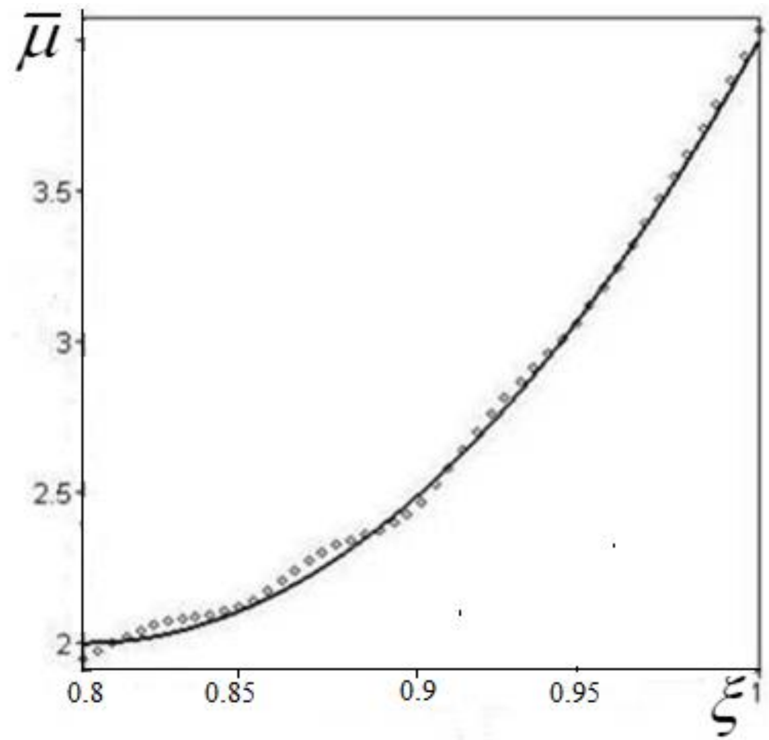

Рис. 6

Влияние параметра термомеханической связанности на результаты реконструкции коэффициента температурных напряжений трубы

$$\bar{\gamma}(\xi) = 1 + \sin\left(10\left(\xi - \xi_0\right)\right)$$

$\delta_0 = 0.1$

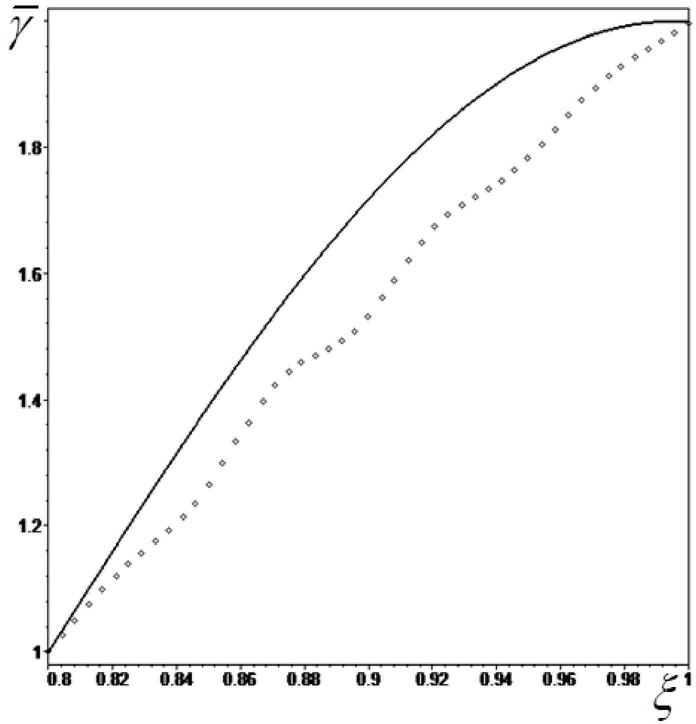

Рис. 7

$\delta_0 = 0.5$

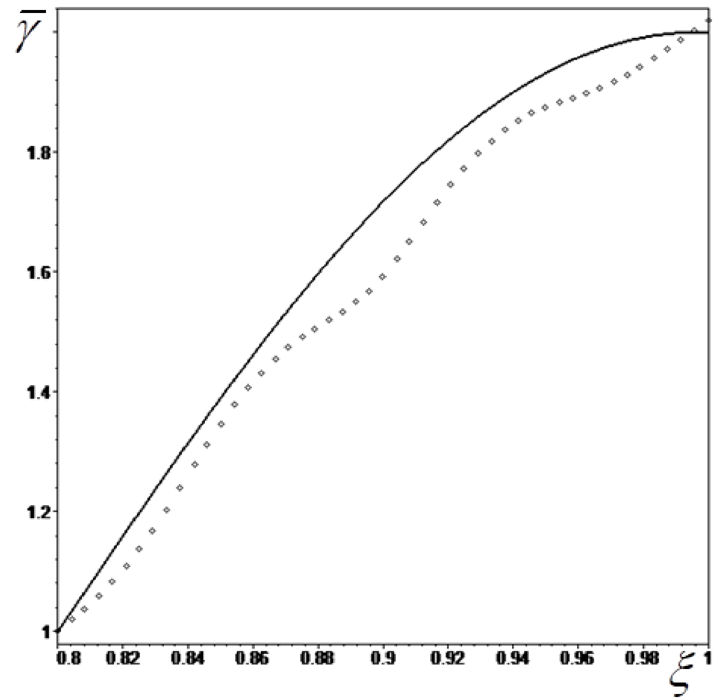

Рис. 8

Результаты идентификация свойств слоя

Решение задачи 1. Восстановление модуля сдвига

$$\bar{\mu}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.45)^4}$$

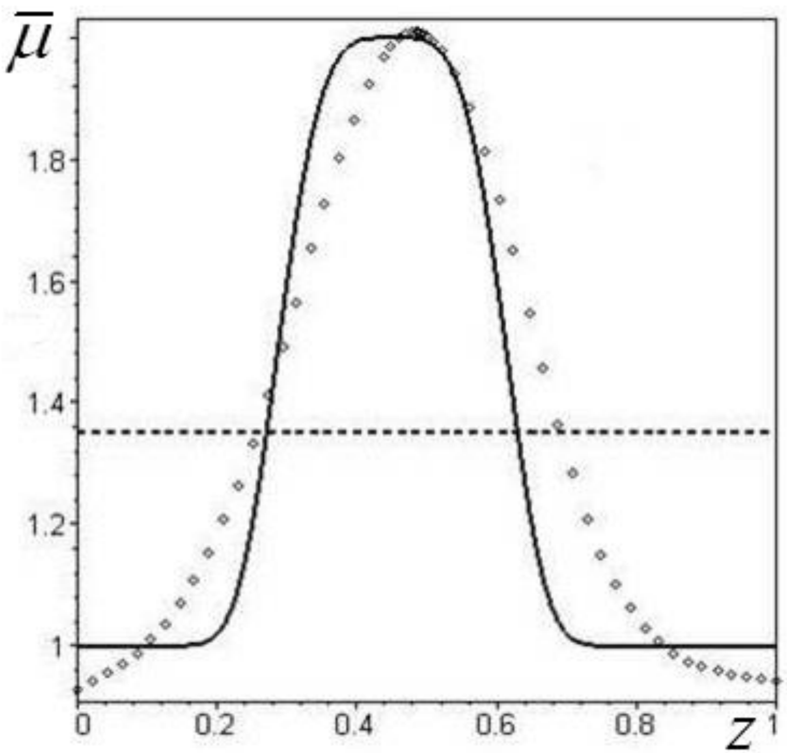

Рис. 9

Решение задачи 2. Реконструкция коэффициента теплопроводности кожи

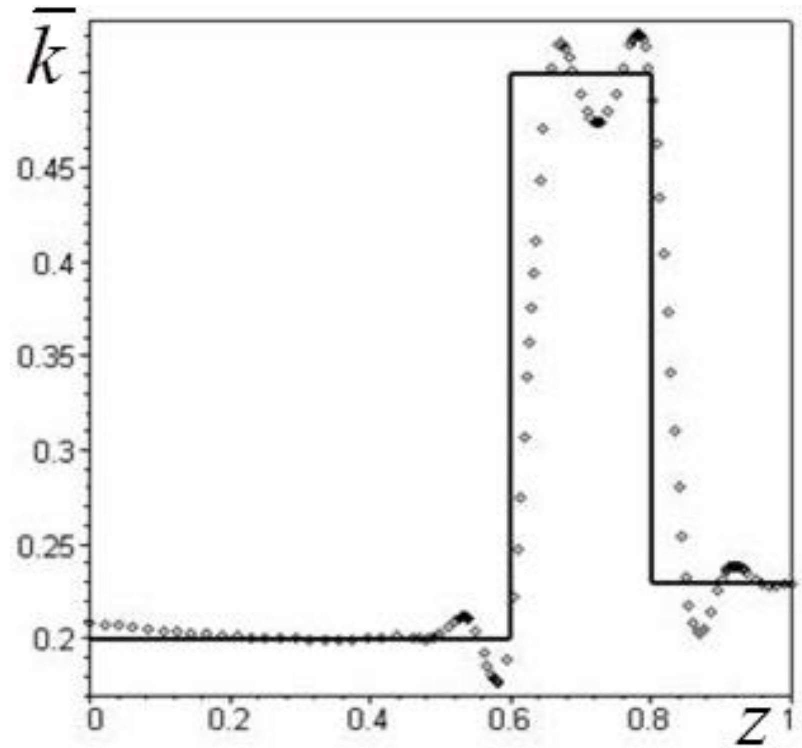

Рис. 10

Влияние зашумления дополнительной информации на результаты реконструкции функции

$$f_{\beta}(\tau_1) = f(\tau_1)\left(1+\beta\gamma_0\right) \tag{61}$$

β - амплитуда зашумления

γ_0 - случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке $[-1,1]$

$$\bar{k}(\xi) = 2\,sin\left(1.3\pi\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right)\right) - 1$$

Точки – отсутствие шума

Штрихпунктир – 1%-й шум

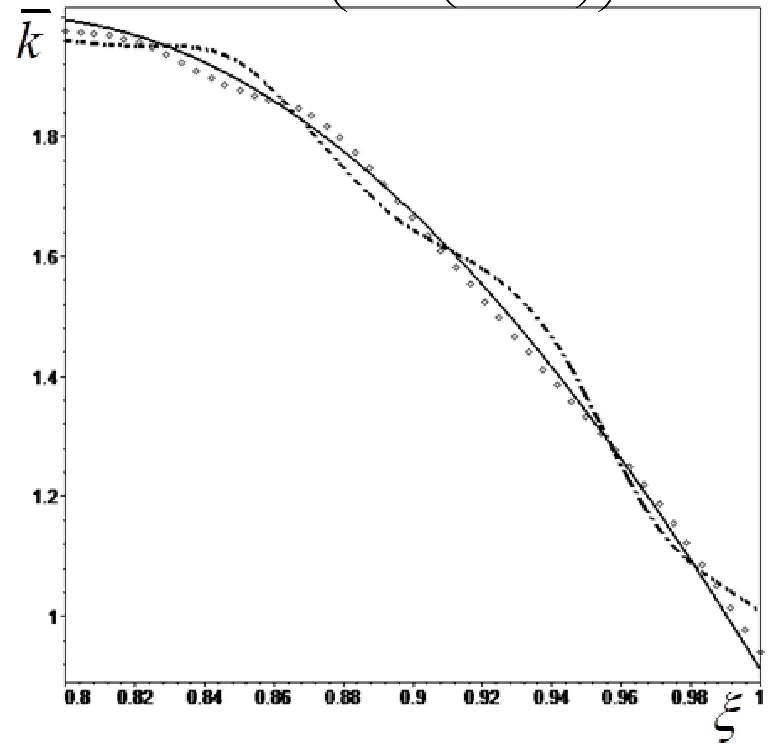

Рис. 11

Идентификация 2-х теплофизических характеристик

Рассматривается два типа тепловой нагрузки на торце стержня $z=1$
1) тепловой поток; 2) температура, меняющаяся по закону $\tau_1 e^{-\tau_1}$

Дополнительная информация

$$W_I(1,\tau_1) = f_I(\tau_1) \qquad \tau_1 \in [a_1, b_1] \tag{62}$$

$$Q_{II}(1,\tau_1) = f_{II}(\tau_1) \qquad \tau_1 \in [a_2, b_2] \tag{63}$$

Начальное приближение определяется в классе линейных функций путем минимизации функционала невязки

$$J = \int_{a_1}^{b_1} \left(f_I(\tau_1) - W_I(1,\tau_1) \right)^2 d\tau_1 + \int_{a_2}^{b_2} \left(f_{II}(\tau_1) - Q_{II}(1,\tau_1) \right)^2 d\tau_1 \tag{64}$$

Система операторных уравнений

$$\int_0^1 \left(\delta\overline{k}^{(n-1)} R_{11}(z,\tau_1) + \delta\overline{c}^{(n-1)} R_{12}(z,\tau_1) \right) dz = f_I(\tau_1) - W_I^{(n-1)}(1,\tau_1) \tag{65}$$

$$\int_0^1 \left(\delta\overline{k}^{(n-1)} R_{21}(z,\tau_1) + \delta\overline{c}^{(n-1)} R_{22}(z,\tau_1) \right) dz = f_{II}(\tau_1) - Q_{II}^{(n-1)}(1,\tau_1) \tag{66}$$

Результаты одновременной реконструкции коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости стержня

$$\bar{k}(z) = 1 - 0.5(z-1)^2$$

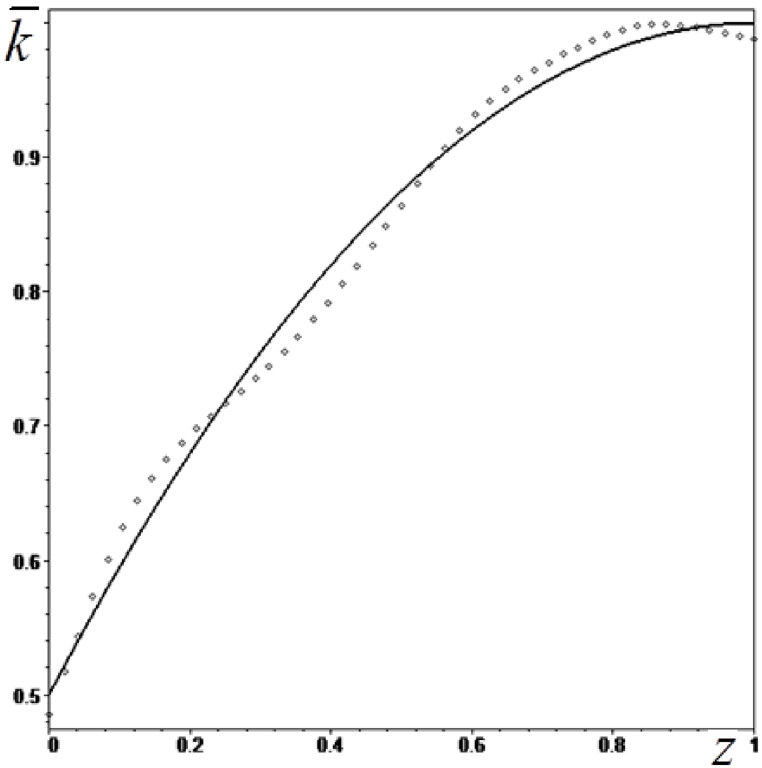

Рис. 12

$$\bar{c}(z) = 0.5(1+z^2)$$

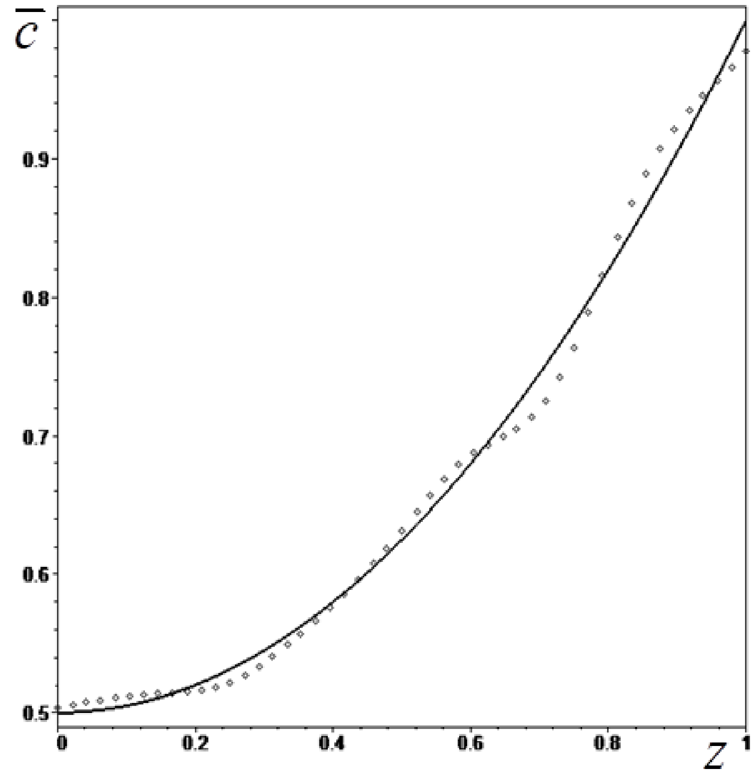

Рис. 13

Поэтапное восстановления двух характеристик конечного цилиндра $\overline{c}(\xi_1)$ и $\overline{k}(\xi_1)$

В случае конечного цилиндра проведенные расчеты показали, что значение норм ядер при поправке коэффициента теплопроводности значительно больше, чем удельной теплоемкости, поэтому восстановить их из решения системы ИУФ1-го рода невозможно.

Принята поэтапная реконструкция функций $\overline{c}(\xi_1)$ и $\overline{k}(\xi_1)$

1) Нахождение поправок $\delta\overline{c}^{(n-1)}$ при $\delta\overline{k}^{(n-1)}=0$

$$\int_{\xi_0}^{1}\delta\overline{c}^{(n-1)}P_1(\xi_1,\tau_1)\xi_1 d\xi_1 = f_0(\tau_1)-d_0^{(n-1)}(1,\tau_1) \qquad \tau_1\in[a,b] \tag{67}$$

2) Нахождение поправок $\delta\overline{k}^{(n-1)}$ при $\delta\overline{c}^{(n-1)}=0$

$$\int_{\xi_0}^{1}\delta\overline{k}^{(n-1)}P_2(\xi_1,\tau_1)\xi_1 d\xi_1 = f_0(\tau_1)-d_0^{(n-1)}(1,\tau_1) \qquad \tau_1\in[a,b] \tag{68}$$

$$P_1(\xi_1,\tau_1)=\frac{1}{g_{10}\beta_1}\int_0^{\tau_1}\frac{\partial d_0^{(n-1)}(\xi_1,\tau_1)}{\partial\tau}\,\frac{\partial d_0^{(n-1)}(\xi_1,\tau_1-\tau)}{\partial\tau}d\tau$$

$$P_2(\xi_1,\tau_1)=\frac{1}{g_{10}\beta_1}\int_0^{\tau_1}\frac{\partial d_0^{(n-1)}(\xi_1,\tau)}{\partial\xi_1}\,\frac{\partial^2 d_0^{(n-1)}(\xi_1,\tau_1-\tau)}{\partial\xi_1\partial\tau}d\tau$$

Результаты поэтапной реконструкции двух характеристик конечного цилиндра

1-й этап

$$\bar{c}(\xi_1) = 6.4\xi_1^2 - 10.2\xi_1 + 5.1$$

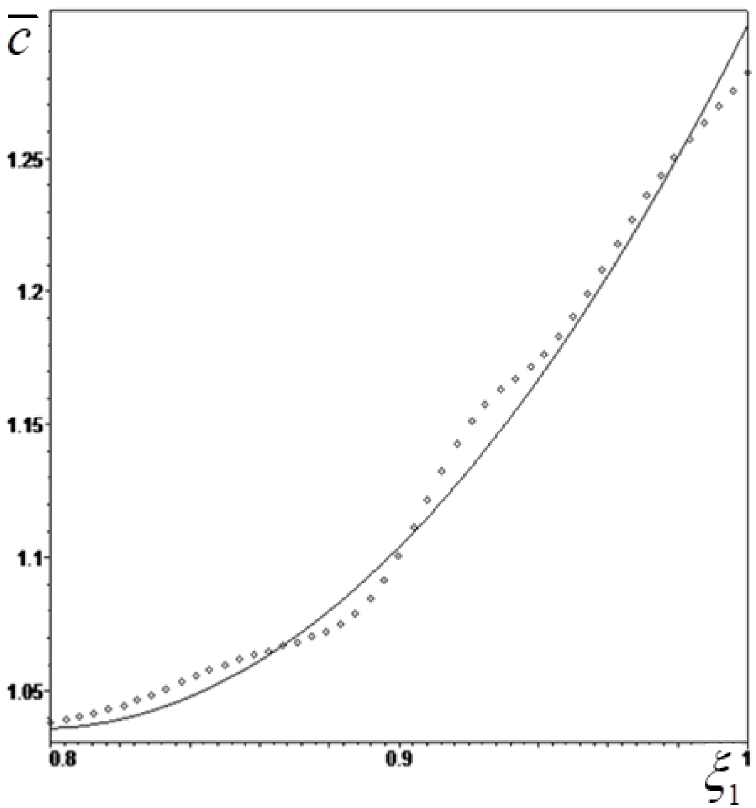

Рис. 14

2-й этап

$$\bar{k}(\xi_1) = -9.3\xi_1^2 + 14.8\xi_1 - 3.18$$

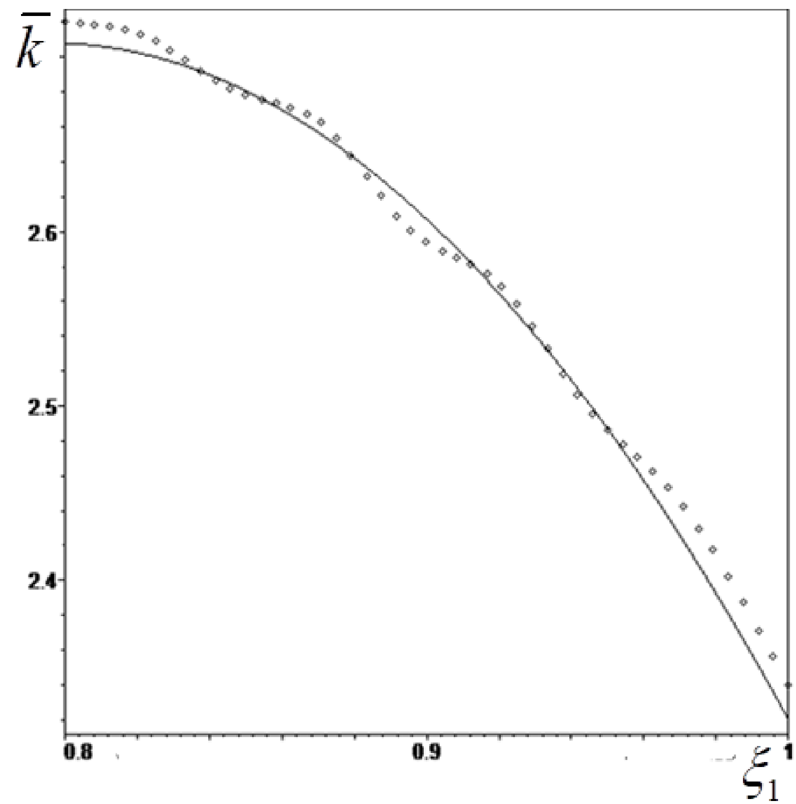

Рис. 15

Результаты поэтапной реконструкции двух характеристик прямоугольника

1-й этап

$$\bar{k}(y_3) = e^{-1.38 y_3}$$

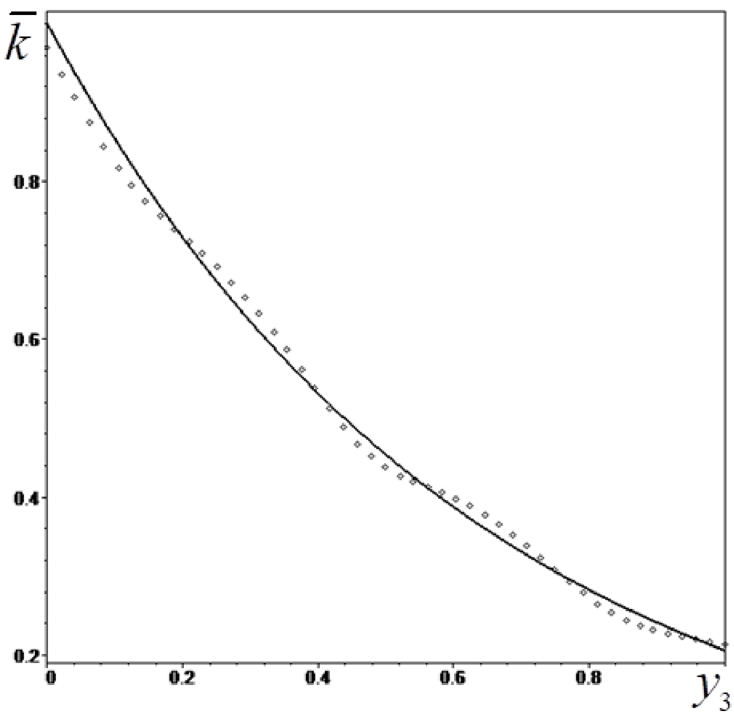

Рис. 16

2-й этап

$$\bar{\gamma}\left(y_3\right) = 0.8 + \sin\left(1.8 y_3\right)$$

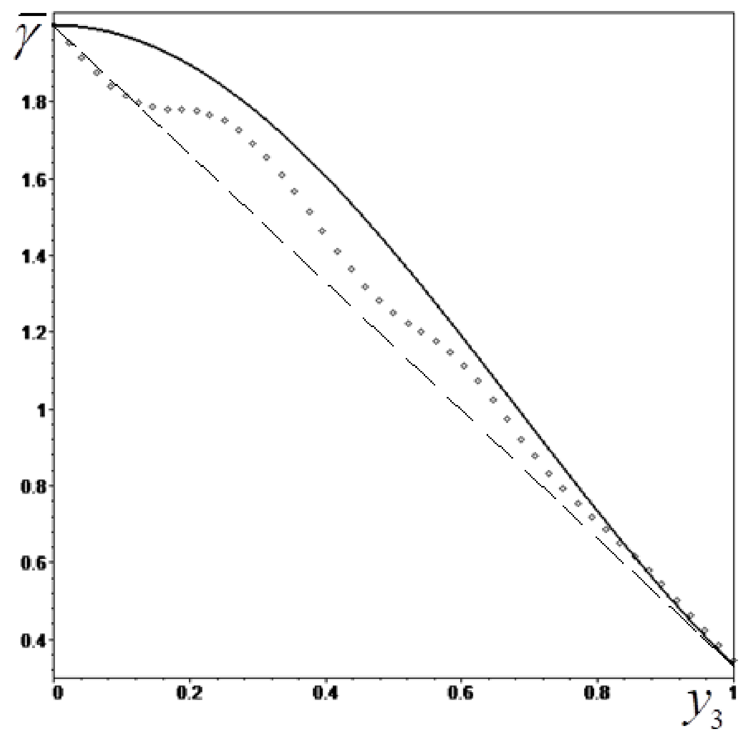

Рис. 17

Особенности итерационной идентификации термомеханических характеристик

1. В случае реконструкции одной характеристики монотонные функции восстанавливаются лучше немонотонных: при отсутствии зашумления погрешность реконструкции не превышает 4% для монотонных и 8% для немонотонных функций. При этом итерационный процесс быстро сходится – для выполнения первого условия выхода, как правило, требуется не более 8 итераций.
2. Процедура реконструкции оказалась устойчивой к 1%-му зашумлению входной информации.
3. Максимальная погрешность реконструкция удельной теплоемкости, плотности, коэффициента температурных напряжений возникает на защемленном торце стержня и внутренней поверхности цилиндра, что связано с особенность ядер соответствующих интегральных уравнений.
4. При уменьшении толщины цилиндра и толщины слоистого материала погрешность реконструкции возрастает. В случае слоистого материала максимальная погрешность – в области сопряжения слоев.
5. Успешная реконструкция коэффициента температурных напряжений возможна только при большом параметре термомеханической связанности.

Спасибо за внимание!